Nombre d'invariants

Soit n un entier naturel.

Pour tout entier naturel k, on désigne par I_n^k le nombre de permutations de n éléments laissant exactement k éléments invariants.

1. Calculer I_n^k pour $k > n$.
   Calculer I_n^n, I_n^{n-1} (pour $n \geq 1$) et I_n^{n-2} (pour $n \geq 2$).

2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} I_n^k$.

3. Montrer que pour tout couple $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$: $I_n^k = C_n^k I_{n-k}^0$.

4. En déduire une table des I_n^k pour $0 \leq n \leq 6$ et $0 \leq k \leq 6$.
   On expliquera la démarche suivie pour l'obtenir

5.a Montrer que $\sum_{k=0}^{n} C_n^k I_k^0 = n!$

5.b Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k (-1)^k = (-1)^n$.

5.c Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n^0 = nI_{n-1}^0 + (-1)^n$.
   (indice : raisonner par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$)
   Donner les valeurs des I_n^0 pour tout $0 \leq n \leq 8$.

5.d Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n^0 = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

5.e Déterminer l'expression générale de I_n^k.

6.a On considère un élément fixé dans un ensemble à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments.
   Combien y a-t-il de permutations laissant au moins invariant celui-ci ?

6.b Interpréter et donner la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} kI_n^k$.

6.c Quel est le nombre moyen d'éléments invariants d'une permutation d'un ensemble à n éléments ?